

## MATEMÁTICAS NS

### Bandas de calificación de la asignatura

#### Matemática discreta

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Puntuaciones:	0 - 12	13 - 25	26 - 37	38 - 49	50 - 61	62 - 73	74 - 100

#### Series y ecuaciones diferenciales

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Puntuaciones:	0 - 12	13 - 25	26 - 38	39 - 50	51 - 62	63 - 74	75 - 100

#### Conjuntos, relaciones y grupos

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Puntuaciones:	0 - 12	13 - 25	26 - 38	39 - 50	51 - 62	63 - 74	75 - 100

#### Estadística y probabilidad

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Puntuaciones:	0 - 12	13 - 25	26 - 37	38 - 49	50 - 60	61 - 72	73 - 100

### Variantes regionales de las pruebas de exámenes

Con el fin de proteger la integridad de los exámenes, se está haciendo cada vez más uso de las variantes regionales de los exámenes. El uso de estas variantes del mismo examen implica que los estudiantes de una región del mundo no siempre estarán rindiendo la misma prueba que los estudiantes de otra región. Se aplica un riguroso proceso para asegurar que las pruebas sean comparables en cuanto a su nivel de dificultad y al contenido que evalúan, y se toman medidas para garantizar la aplicación de los mismos estándares en la evaluación de los exámenes correspondientes a las diferentes versiones de las pruebas. Para la convocatoria de mayo de 2009, el BI ha elaborado variantes regionales de las pruebas de Matemáticas NS.

## Evaluación interna del Nivel Superior

### Bandas de calificación del componente

<b>Calificación final:</b>	1	2	3	4	5	6	7
<b>Puntuaciones:</b>	0 - 6	7 - 13	14 - 18	19 - 23	24 - 29	30 - 34	35 - 40

En esta convocatoria, las carpetas tuvieron, en general, buena presentación. Los profesores y los alumnos parecen haber entendido las expectativas de evaluación. En general, el trabajo estaba corregido con claridad y los formularios requeridos han sido completados correctamente. A continuación se resumen las observaciones realizadas por el equipo de moderación.

## Ámbito y adecuación del trabajo entregado

La mayoría de las tareas de la carpeta fueron tomadas de la publicación vigente "Matemáticas NS – Tareas de la carpeta para usar en 2009 y 2010". Hubo también algunas tareas de buena calidad, presentadas por varios colegios. Se anima a los profesores a preparar sus propias tareas, teniendo presente la necesidad de que satisfagan plenamente todos los criterios.

Hubo tres motivos de preocupación en esta convocatoria:

1. Algunos profesores utilizaron tareas tomadas del Material de ayuda al profesor del programa anterior. Como se ha explicado en informes de la asignatura anteriores y por medio de las Notas para coordinadores, esas tareas ya no pueden ser utilizadas; por consiguiente, una cantidad de alumnos perdió un número significativo de puntos, ¡por motivos totalmente ajenos a ellos mismos! Esto es completamente inexcusable y debe ser rectificado.
2. Las tareas tomadas del documento correspondiente a Matemáticas NM no son del nivel apropiado para Matemáticas NS y no se deberían haber utilizado.
3. A juzgar por la similitud de algunas carpetas, parecería que algunos profesores están brindando demasiada orientación o dirección a los alumnos. Para evitar el peligro de una mala práctica, esta orientación no debería prescribir cómo deberían proceder los alumnos frente a la tarea asignada.

## Desempeño de los alumnos con relación a cada criterio

La mayoría de los alumnos tuvo buen rendimiento en el criterio A. El uso de notación de computadora pareció ser muy limitado; sin embargo, el uso inadecuado de "A", "E09", y cosas del estilo, sigue malogrando el trabajo de algunos alumnos. El uso poco cuidado e incorrecto de algunos términos (por ejemplo, "ecuación" en lugar de "expresión") también debe ser evitado.

En algunas muestras hubo evidencia de buen nivel de habilidad en la comunicación. Cuando el trabajo del alumno comenzaba con una introducción a la tarea, y los pasos y resultados eran acompañados de comentarios, anotaciones y conclusiones, el trabajo resultaba fácil de leer y de seguir, y lograba una puntuación alta en el criterio B. Sin embargo, hubo muchos

alumnos cuyo trabajo no se sostenía por sí solo, en particular cuando no había una introducción a la tarea o cuando se le daba un formato de pregunta-respuesta. Las gráficas sin rotular y las tablas relegadas al apéndice van en detrimento de una presentación efectiva y deberían haber sido penalizadas.

Los criterios C y D apuntan a evaluar el contenido matemático y representan, conjuntamente, la mitad de los puntos otorgados a cada trabajo. En general, los alumnos han producido buenos trabajos y las evaluaciones de sus profesores han sido correctas. Sin embargo, en algunas tareas de tipo I, la insuficiente exploración y elaboración de patrones tornaba cuestionable la repentina formulación de una conjetura. En algunos casos, los resultados se habían tomado de fuentes de Internet, y había poco trabajo individual de exploración e investigación, clave en la tarea de tipo I.

En las tareas de tipo II, las variables deberían estar definidas explícitamente. Se espera que los alumnos demuestren algún reconocimiento del significado de los resultados obtenidos en función del modelo, al compararlos con la situación real, y que hayan reflexionado sobre lo que han hallado. Los análisis de los datos deben ser cuantificados, y si resultara apropiado aplicar un análisis de regresión, es necesario que el alumno haya fundamentado su elección. El uso de programas de computadora que determinan automáticamente el “mejor” modelo de regresión a menudo deja poco librado a la interpretación del alumno y debería ser evitado.

El uso de medios tecnológicos fue considerablemente variado. Se otorgó con excesiva generosidad la puntuación máxima al uso *apropiado* pero no necesariamente *eficaz* de la tecnología, por ejemplo, por la simple inclusión de una gráfica. Para merecer la puntuación máxima, el uso de la tecnología debería contribuir significativamente al desarrollo de cada tarea. Se debería disuadir al alumno de incluir las secuencias de teclas utilizadas en la calculadora de pantalla gráfica: son totalmente innecesarias.

Hubo muchos buenos trabajos; sin embargo, el otorgamiento de la puntuación máxima en el criterio F requiere no solo la entrega de un trabajo completo y correcto, sino también que haya evidencia de sofisticación matemática.

## Recomendaciones para la enseñanza a futuros alumnos

Las tareas del *Material de ayuda al profesor* vigente no deberán utilizarse a partir de esta convocatoria; su uso conlleva la quita de 10 puntos. Pedimos que, por favor, se remitan al documento “Matemáticas NS – Tareas de la carpeta para usar en 2009 y 2010” para ver las tareas sugeridas. Se anima a los profesores a diseñar sus propias tareas.

Los profesores deberían elegir tareas que provean a los alumnos de una variedad de actividades matemáticas adecuadas para el nivel superior. Las tareas tomadas del *Material de ayuda al profesor* de Matemáticas NM no cumplen con los requerimientos del NS. Por favor, asegúrense de que los alumnos no pierdan puntos por causa de las elecciones desafortunadas del profesor.

El docente que no está informado acerca de los cambios introducidos en los criterios de evaluación de la carpeta es generalmente el causante de una significativa pérdida de puntos durante la moderación. Esto es no solamente desastroso para el alumno, sino también completamente injusto, y no debería ocurrir.

Se espera que los profesores escriban directamente sobre el trabajo de sus alumnos, no solo para brindarles a ellos una devolución acerca de su rendimiento, sino también para proveer de información a los moderadores. Algunas muestras contenían muy pocos comentarios realizados por el profesor. La moderación se tornaba extremadamente difícil cuando no era posible determinar los fundamentos del profesor para otorgar determinada puntuación.

A la hora de confirmar el nivel de logro otorgado en cada criterio, a los moderadores les resulta muy útil contar con información referida al contexto en el que se desarrolló cada tarea de la carpeta. Cada muestra debe ir acompañada de esta información, ya sea en el Formulario A o a través de comentarios anecdóticos.

Las carpetas de la muestra deben ir acompañadas de una resolución de las tareas de la publicación vigente, así como de la de las tareas diseñadas por el profesor, para que los moderadores puedan justificar la precisión del trabajo y apreciar el nivel de sofisticación demostrado en el trabajo.

Las tareas del documento vigente han sido utilizadas con los estudiantes que completan su diploma en 2009. Solo pueden ser utilizadas nuevamente con estudiantes que terminen el programa de diploma en 2010. No se les debería asignar estas tareas a los alumnos que comiencen el primer año en el otoño de este año.

## Prueba 1 del Nivel Superior

### Bandas de calificación del componente

<b>Calificación final:</b>	1	2	3	4	5	6	7
<b>Puntuaciones:</b>	0 - 17	18 - 35	36 - 49	50 - 63	64 - 76	77 - 90	91 - 120

### Áreas del programa y del examen que resultaron difíciles para los alumnos

En esta prueba, los alumnos tuvieron dificultad en las preguntas que requerían una demostración o una explicación, o que les pedían que comprobaran un resultado. Las preguntas que requerían una respuesta estructurada y lógica resultaron problemáticas para muchos. Las áreas del programa que ocasionaron dificultades fueron los logaritmos (la manipulación y la simplificación), los números complejos, la inducción, la notación sigma, las funciones (conocimiento de definiciones y trazado de gráficas), las funciones de distribuciones de probabilidad continuas y las matrices.

La necesidad de repartir equilibradamente el tiempo entre la sección A y la sección B resultó problemática para algunos. Fueron comunes los errores en cálculos aritméticos básicos y en la manipulación algebraica. La presentación general y la formulación de las respuestas fueron, en términos generales, bastante pobres.

Parecería que algunos alumnos no estaban al tanto de los términos de examen y de su importancia. Asimismo, no parece haberse entendido la conexión entre los apartados de las

preguntas en la sección B, porque muchos alumnos no hicieron las conexiones que hacían que las preguntas fueran más fáciles o más accesibles.

## Áreas del programa y del examen en que los alumnos demostraron estar bien preparados

En general, las preguntas rutinarias fueron bien resueltas. Las áreas específicas que se resolvieron bien fueron los vectores, la integración (simple), las funciones inversas, el teorema del binomio y la diferenciación implícita. Muchos estudiantes pudieron resolver los apartados posteriores de las preguntas de respuesta larga, aun después de no haber podido obtener un resultado en la primera parte de la pregunta.

## Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar las distintas preguntas

### Pregunta 1

La mayoría pudo abordar esta pregunta, aunque resultó sorprendente la cantidad de alumnos que utilizó ya sea la división sintética o la división polinómica, porque esto a menudo deriva en dificultades y errores. El error más común fue aplicar el factor 7 al miembro equivocado de la ecuación. También resultó decepcionante la cantidad de alumnos que cometió simples errores algebraicos hacia el final de la pregunta.

### Pregunta 2

Esta pregunta fue bien resuelta por la mayoría. El error más común fue asignarle la calificación Notable al 20% con mejores notas, en lugar de al grupo *siguiente* de alumnos.

### Pregunta 3

La integración fue particularmente bien resuelta en esta pregunta. Algunos estudiantes trabajaron con la distribución como si hubiera sido discreta. En general, una vez identificada la distribución, el apartado (a) fue bien resuelto, aunque hubo cierta cantidad de “creatividad” aplicada a la operatoria algebraica, para poder llegar al resultado. Un número significativo de estudiantes no igualó la integral a 1 de entrada. Muy pocos se percataron de la simetría de la distribución, en el apartado (b).

### Pregunta 4

Muchos estudiantes no *comprobaron* con el detalle suficiente como para ser convincentes, en el apartado (a). No hubo conciencia de la necesidad de mostrar los pasos de la simplificación. Hubo demasiados alumnos que no conectaron el apartado (a) con el (b), y parecían no conocer el término de examen “a partir de lo anterior” y su implicación a la hora de la corrección (no se otorgarán puntos si se usan métodos alternativos). En muchos casos, no se hicieron bien las simplificaciones de las expresiones logarítmicas, y hubo demasiados alumnos que escribieron  $3^3 = 9$ . Hubo muy pocas resoluciones elegantes a esta pregunta.

**Pregunta 5**

La primera parte de esta pregunta fue bien resuelta por muchos; el único motivo de preocupación fue la cantidad de alumnos que no simplificó el resultado  $-\frac{8x}{2y}$ . Hubo muchas variaciones sobre la fórmula para el volumen, en el apartado (c); el error más común fue utilizar un múltiplo de  $2\pi$  en lugar de  $\pi$ . En términos generales, esta pregunta fue bien resuelta por muchos.

**Pregunta 6**

La resolución de esta pregunta fue pobre. Muchos estudiantes no fueron lo suficientemente precisos en el apartado (a). La respuesta más común fue escribir que  $a^2 - b^2$  era positivo, sin explicación alguna. Hubo confusión entre el determinante y la inversa. En el apartado (c), las explicaciones fueron nuevamente insuficientes (por ejemplo,  $(a^2 - b^2)^2$  es mayor de cero, en lugar de no negativo). Un número significativo de alumnos no comprendió la necesidad de ser preciso. Muy pocos utilizaron el hecho de que el determinante de un producto es el producto de los determinantes.

**Pregunta 7**

Los apartados (a) y (c) fueron resueltos bastante bien por muchos, pero el método utilizado en (b) llevaba a menudo a tediosas y largas manipulaciones algebraicas en las que los estudiantes se perdían y, por ende, no llegaban a la solución correcta. En el apartado (c), muchos no dieron el argumento principal.

**Pregunta 8**

La resolución de esta pregunta fue pobre, desde varios puntos de vista. Muchos estudiantes conocían la estructura de la inducción, pero no demostraron saber lo que estaban haciendo. La notación general fue pobre, tanto para la inducción propiamente dicha como para la notación sigma.

Al tratar el caso  $n = 1$ , hubo demasiados alumnos que escribieron directamente la ecuación, en lugar de utilizar cada miembro por separado y concluir con una afirmación. Hubo también demasiados alumnos que no indicaron la conclusión para este caso.

Muchos no escribieron el supuesto para  $n = k$  como supuesto.

La mayoría escribió la ecuación para  $n = k + 1$  y trabajó con la ecuación. También fue común la omisión de la sigma y el uso inadecuado de  $n$  y de  $k$  en la proposición. Hubo, sin embargo, algunas resoluciones de muy buen nivel.

A menudo, la conclusión final o bien estaba incompleta, o bien no había sido considerada, lo cual llevaría a la conclusión de que el estudiante no entendía realmente de qué se trata la inducción.

**Pregunta 9**

Hubo muy pocas respuestas completas y precisas al apartado (a). La respuesta incorrecta más común fue escribir la inecuación surgida del triángulo y pensar que esto era suficiente.

Muchos reemplazaron un valor particular de  $n$  e ilustraron el resultado. La mayoría de los estudiantes reconoció la necesidad de utilizar la regla del coseno y la aplicó correctamente. Muchos luego desarrollaron y simplificaron, para llegar a la respuesta correcta. En algunos exámenes, hubo bastante “creatividad algebraica” en este desarrollo. Hubo muchas buenas respuestas a esta pregunta.

### **Pregunta 10**

Esta pregunta fue muy bien resuelta por muchos estudiantes. Los errores más comunes fueron utilizar la misma variable para la segunda recta, y afirmar que los vectores del apartado (b) no eran paralelos, y por lo tanto las rectas sí se cortaban. Muchos estudiantes no verificaron la solución para establecer que esto efectivamente era cierto.

Cuando se les pidió que dieran la ecuación de la recta, en el apartado (e), muchos no la dieron en forma de ecuación, y mucho menos de ecuación vectorial.

En muchos exámenes, la diferencia entre vectores posición y coordenadas no era clara.

Para hallar el punto simétrico, en el apartado (f), muchos utilizaron técnicas ineficientes que insumían demasiado tiempo.

### **Pregunta 11**

Muchos estudiantes no pudieron graficar la función. Hubo confusión entre la prueba de la recta horizontal y la de la vertical, para las funciones inyectivas. Un número significativo de alumnos dio explicaciones largas e incorrectas para identificar una función inyectiva. La mayoría de los estudiantes halló bien la función inversa, aunque la notación usada fue, generalmente, pobre. Muchos alumnos omitieron dar el dominio de la inversa, o lo dieron incorrectamente, aun cuando la gráfica dibujada era correcta. Muchos no hicieron las conexiones entre los apartados de la pregunta. Un ejemplo de esto fue la cantidad de alumnos que perdió tiempo buscando el punto de intersección, en el apartado (e), a pesar de que estaba dado en el (d).

### **Pregunta 12**

En (b), muchos estudiantes reemplazaron por el término del segundo miembro de la ecuación (nuevamente, no se hizo la conexión con el apartado (a)), y multiplicaron por el conjugado; algunos lograron hacerlo bien, pero resulta ineficiente. El desarrollo del binomio fue bien resuelto, aun en los casos en que los estudiantes no habían resuelto el apartado anterior. Muchos no vieron la conexión entre los apartados (d) y (f), lo cual derivó en cierta creatividad al abordar la integración. Muy pocos abordaron el último apartado y de estos, muchos intentaron hallar otra integral, haciendo caso omiso del “a partir de lo anterior”, mientras que otros hicieron alusión a las gráficas de seno y de coseno, pero no a las gráficas en cuestión en esta pregunta.

## Recomendaciones y orientación para la enseñanza a futuros alumnos

- Los alumnos necesitan más práctica en la resolución de preguntas que requieren razonamiento matemático formal y estructurado.
- Los estudiantes deben ser conscientes de las diferencias entre los términos “Demuestre”, “Compruebe”, “Ilustre” y “Verifique”. Se les debería dar ejemplos, y utilizarlos en la resolución de preguntas.
- Los estudiantes deberían resolver preguntas que incluyan la instrucción “a partir de lo anterior”, y comprender las implicaciones a la hora de presentar una resolución.
- Los estudiantes necesitan orientación en las preguntas que requieren una explicación, y en lo que resulta suficiente y necesario.
- Se debe subrayar la importancia de estructurar resoluciones en lugar de redactar respuestas.
- Los estudiantes necesitan encontrarse con una variedad de preguntas que requieran análisis y razonamiento, más que con simples preguntas rutinarias.

## Prueba 2 del Nivel Superior

### Bandas de calificación del componente

<b>Calificación final:</b>	1	2	3	4	5	6	7
<b>Puntuaciones:</b>	0 - 9	10 - 19	20 - 34	35 - 48	49 - 62	63 - 76	77 - 120

### Comentarios generales

Una prueba 2 provee margen para que los alumnos demuestren la amplitud de su conocimiento del material troncal, su competencia matemática y su habilidad para relacionar temas, su capacidad de razonamiento, y para que utilicen adecuadamente la calculadora de pantalla gráfica. En particular, los alumnos deberían estar preparados para dibujar e interpretar gráficas, realizar cálculos habituales con la calculadora y entender la diferencia entre un resultado exacto y una respuesta numérica aproximada. Si bien los examinadores están de acuerdo con la percepción de aquellos profesores que aportaron su devolución a través de los formularios G2, en el sentido de que la prueba tenía algunos aspectos que presentaban un desafío, también es cierto que les decepcionó la poca capacidad de algunos alumnos para abordar preguntas sencillas, sobre buena parte del programa.

### Áreas del programa y del examen que resultaron difíciles para los alumnos

La interacción entre los vectores y la geometría de coordenadas; cómo la cinemática puede llevar a una ecuación diferencial; las permutaciones y las combinaciones; la integración por sustitución; las razones de cambio de variables relacionadas.

## Áreas del programa y del examen en que los alumnos demostraron estar bien preparados

Los alumnos desplegaron una amplia gama de estos elementos. Por supuesto que los alumnos se sintieron mucho más cómodos con las partes relativamente rutinarias de las preguntas. Entre los de mayor habilidad, en general hubo evidencia de amplio conocimiento y habilidad operatoria, pero con frecuencia estos no estaban bien expresados. La mayoría de los alumnos demostró buena habilidad en lo algebraico y en el manejo de la calculadora, y comprensión de la probabilidad básica y de las distribuciones de probabilidad. Aunque la mayoría de los alumnos mostró competencia en el cálculo diferencial, en particular en la regla de la cadena, esto no fue extensivo a las tasas de cambio de variables relacionadas. Las preguntas expresadas verbalmente, en lugar de a través de instrucciones matemáticas directas, fueron las más problemáticas para unos cuantos alumnos.

## Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar las distintas preguntas

### Pregunta 1

Si bien esta fue la pregunta que mejor se resolvió en la prueba, resultó decepcionante que un número significativo de alumnos presentara diagramas de Venn a los que les faltaba información clave.

### Pregunta 2

Se vio una variedad de métodos, ya sea a partir de un producto escalar de vectores, o basados en la regla para las pendientes de rectas perpendiculares. El principal problema, en el primer método, radicó en la elección del vector dirección correcto para la recta.

### Pregunta 3

La mayoría de los alumnos logró buena puntuación en esta pregunta y mostró competencia en la diferenciación no trivial. Las reglas sobre arrastre de error les permitieron a los alumnos recuperarse de errores leves cometidos en el apartado (a). Algunos alumnos dieron muestra de su creatividad al usar la calculadora para resolver el apartado (b), aun cuando no habían podido llegar a la respuesta correcta en el apartado (a).

### Pregunta 4

Esta pregunta fue bien resuelta por muchos alumnos. Parecería, sin embargo, que pocos alumnos conocían la terminología usada habitualmente —*estiramiento* y *traslación*— para describir las transformaciones gráficas pertinentes. La mayoría hizo buen uso de la calculadora para hallar los puntos críticos y para determinar los intervalos correctos. Una minoría significativa no incluyó el valor  $x = 10$  como extremo del intervalo.

**Pregunta 5**

La mayoría de los alumnos que resolvieron bien esta pregunta habían empezado por dibujar un diagrama de árbol, utilizando un símbolo para representar la probabilidad de que una persona elegida al azar hubiera sido contagiada del virus de la influenza. Los que no dibujaron un diagrama de árbol mostraron poca idea de cómo aplicar la fórmula de probabilidad condicional.

**Pregunta 6**

La resolución de esta pregunta, que relacionaba el tema de la cinemática con el de las ecuaciones diferenciales de primer orden, fue pobre. Muchos alumnos parecían no saber que la aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo. A esto se le sumó, a menudo, que no reconocieran una ecuación diferencial separable, y/o que integraran con respecto a la variable equivocada.

**Pregunta 7**

Muchos alumnos, de prácticamente todo el rango de calificaciones, lograron una buena puntuación en esta pregunta. Resultó gratificante que la mayoría de los alumnos conociera la condición para el discriminante de una cuadrática con raíces reales distintas. Algunos de los que perdieron puntos en el apartado (b) o bien no formularon un número suficiente de ecuaciones lineales para determinar las tres incógnitas, o bien cometieron errores aritméticos en la resolución manual (se vieron pocas resoluciones por medio de la calculadora).

**Pregunta 8**

Muy pocos alumnos dieron evidencia de tener una estrategia clara para resolver una pregunta de este tipo. El problema, presentado dentro de un contexto circular, no era más difícil que uno análogo de tipo lineal.

**Pregunta 9**

Para muchos alumnos, esta fue una pregunta a todo o nada. A los examinadores les sorprendió la cantidad de alumnos que no pudo realizar el cambio de variable en la integral, usando la sustitución dada. Otra piedra de tropiezo, para algunos alumnos, fue la falta de cuidado que tuvieron en la aplicación de la versión trigonométrica del teorema de Pitágoras al reducir el integrando a un múltiplo de  $\cos^2 \theta$ . Sin embargo, los que lo lograron generalmente completaron con éxito la resolución.

**Pregunta 10**

Para los alumnos que se dieron cuenta de que este era un problema de análisis aplicado que involucraba tasas de cambio de variables relacionadas, la principal fuente de error radicó en la diferenciación de la inversa de la tangente en el apartado (a). A algunos les resultó más fácil el apartado (b) que el (a), referido a una longitud variable, en lugar de un ángulo. Los examinadores observaron una cantidad de métodos alternativos.

### Pregunta 11

Esta fue la pregunta que mejor se resolvió en la sección B: la mayoría de los alumnos eligió la distribución de probabilidad correcta en cada apartado. Las principales causas de error: (b) omitir el coeficiente binomial en el cálculo; (c) no reformular la condición “al menos una botella” en función de la probabilidad de no obtener ninguna botella; (d) usar 1,2 en lugar de  $-1,2$  en la inversa de la normal, o no usar la inversa para nada; (e)(ii) malinterpretar la frase “más de dos”.

### Pregunta 12

Esta no es una pregunta inherentemente difícil, pero los alumnos o se complicaron la vida más de lo necesario o evitaron contestarla casi por completo. La clave de la resolución de la pregunta reside en obtener el resultado dado en el apartado (b), lo cual requiere la construcción de una recta paralela a MN, que pase por Q. Los diagramas vistos por los examinadores en algunos exámenes tienden a sugerir que la propiedad de perpendicularidad entre la tangente al círculo y el radio asociado no está tan arraigada en el conocimiento como suponían. Algunos alumnos, en las expresiones que dieron, mezclaron radianes con grados.

### Pregunta 13

A pesar de ser esta la última pregunta de la prueba, tuvo partes que resultaron accesibles hasta para los alumnos más flojos. La inmensa mayoría de los alumnos obtuvo puntos en el apartado (a), a pesar de que algunas gráficas estaban bastante desprolijas. Muchos alumnos también abordaron los apartados (b), (c) y (d). En el apartado (b), sin embargo, como el resultado estaba dado, debería haber quedado claro que se requería algún tipo de procedimiento escrito, y no una referencia a la gráfica, que muchas veces no tenía marcada la escala. En el apartado (d)(i), si bien, en general, las funciones estaban bien derivadas, ocurrió con frecuencia que solo se verificaba la igualdad de las pendientes para uno de los puntos. En el apartado (e)(i), muchos de los alumnos que llegaron hasta aquí pudieron determinar los valores de las coordenadas y de los máximos locales numéricamente, utilizando la calculadora, y a esto se le otorgó puntos. En el apartado (e)(ii), sin embargo, solamente podían usarse los valores exactos.

## Recomendaciones y orientación para la enseñanza a futuros alumnos

Los examinadores, en su conjunto, manifiestan una preocupación por el hecho de que son demasiado pocos los estudiantes que parecen poder demostrar que han explorado los temas del programa con el nivel de profundidad que se espera. Muchos alumnos pueden realizar con éxito las operaciones de rutina, pero hacen agua cuando se encuentran con situaciones apenas un poco más difíciles y de aplicación. Se les debería recordar a los alumnos que la resolución de preguntas matemáticas a menudo requiere la interacción entre varios temas del programa y, en caso de resultar apropiado, el uso inteligente de la calculadora. Los profesores deberían insistir en que sus alumnos expliquen su procedimiento y su razonamiento y, por supuesto, asegurarse de que sigan las instrucciones dadas en las consignas.

## Prueba 3 del Nivel Superior – Matemática discreta

### Bandas de calificación del componente

<b>Calificación final:</b>	1	2	3	4	5	6	7
<b>Puntuaciones:</b>	0 - 7	8 - 15	16 - 23	24 - 30	31 - 36	37 - 43	44 - 60

### Áreas del programa y del examen que resultaron difíciles para los alumnos

En esta prueba, los alumnos tuvieron dificultades con el uso de las matrices de adyacencia, con el teorema chino del resto y con la aplicación de ciertos aspectos del teorema de Fermat.

### Áreas del programa y del examen en que los alumnos demostraron estar bien preparados

En general, los alumnos parecen haber estar razonablemente bien preparados para las preguntas sobre algunos aspectos de la teoría de grafos y en el uso del algoritmo euclidiano.

### Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar las distintas preguntas

#### Pregunta 1

La mayoría de los alumnos pudo nombrar un algoritmo que permitiera hallar el sistema de menor coste y pudo después aplicar el algoritmo. Todos los alumnos, salvo los más flojos, pudieron abordar esta pregunta con cierta solvencia. En 1(b), algunos alumnos perdieron puntos por no indicar el orden en que se añadían las aristas.

#### Pregunta 2

El apartado (a) de esta pregunta era la más accesible de la prueba y fue resuelta correctamente por la mayoría de los alumnos. La mayoría de los alumnos pudo empezar el apartado (b), pero algunos cometieron errores en el camino y unos cuantos no dieron la solución general.

#### Pregunta 3

Los alumnos de más habilidad tuvieron poco problema con esta pregunta, pero un número significativo de alumnos más flojos comenzaron por cometer errores al dibujar el grafo  $G$ , en el que el error más común fue la omisión de los lazos y las aristas dobles. También tuvieron problemas a la hora de aplicar los conceptos de circuitos eulerianos y ciclos hamiltonianos. Una mayoría de alumnos no pudo completar el apartado (d): un número significativo no dio evidencia alguna de entender lo que se pedía.

**Pregunta 4**

Hubo algunas resoluciones totalmente correctas a esta pregunta, pero muchos estudiantes no pudieron justificar satisfactoriamente el resultado. Algunos alumnos habían aprendido una fórmula para aplicar el teorema chino del resto, pero no pudieron aplicarla bien en esta situación. Muchos trabajaron con las condiciones de divisibilidad, pero no llegaron demasiado lejos en la justificación.

**Pregunta 5**

Hubo muy pocas respuestas totalmente correctas. Los que conocían el teorema de Fermat, no lo aplicaron bien.

**Recomendaciones y orientación para la enseñanza a futuros alumnos**

- Los estudiantes deben estudiar la totalidad del programa.
- Los estudiantes deben conocer la terminología correcta.
- Los estudiantes deben tener presente que se les pueden plantear preguntas contextualizadas.

**Prueba 3 del Nivel Superior – Series y ecuaciones diferenciales****Bandas de calificación del componente**

<b>Calificación final:</b>	1	2	3	4	5	6	7
<b>Puntuaciones:</b>	0 - 8	9 - 16	17 - 25	26 - 32	33 - 40	41 - 47	48 - 60

**Áreas del programa y del examen que resultaron difíciles para los alumnos**

En esta prueba los alumnos tuvieron dificultad en decidir cuál era la prueba de convergencia adecuada y en resolver correctamente las ecuaciones diferenciales.

**Áreas del programa y del examen en que los alumnos demostraron estar bien preparados**

En general los alumnos parecen haber estado bien preparados para las preguntas sobre la regla de L'Hopital y en el uso del método de Euler para resolver una ecuación diferencial.

## Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar las distintas preguntas

### Pregunta 1

Esta pregunta resultó accesible para la inmensa mayoría de los alumnos, que se dio cuenta de que había que aplicar la regla de L'Hopital. Unos pocos, de entre los alumnos más flojos, no se dieron cuenta de que, en el apartado (b), había que aplicarla dos veces. Se vieron muchas resoluciones totalmente correctas.

### Pregunta 2

El apartado (a) venía planteado de manera poco usual, lo cual resultó un problema para algunos alumnos, ya que intentaron resolver primero el apartado (b) y hallar luego la serie de Maclaurin por un método habitual. Fueron pocos los que lo lograron, dado que, por lo general, se trataba de alumnos de menor habilidad, y cometieron errores en la resolución de  $y = f(x)$ . La mayoría de los alumnos sabía cómo empezar el apartado (b) y se dio cuenta de la necesidad de utilizar un factor de integración, pero algunos no lo lograron o porque omitieron el signo negativo en el factor de integración, o porque no vieron que  $e^{\ln \cos x} = \cos x$ , o porque no pudieron integrar  $\cos^2 x$ . Pero así y todo, algunos alumnos alcanzaron la puntuación máxima en esta pregunta.

### Pregunta 3

Esta pregunta fue la que resultó la más difícil de la prueba: solo los mejores alumnos obtuvieron la puntuación total. La resolución del apartado (a) fue muy pobre, y un número significativo de alumnos no pudo empezar la pregunta. Una cantidad mayor de alumnos identificó el apartado (b) como un caso del criterio de la integral, pero a menudo no pudo desarrollar el procedimiento más allá de esto. En muchos casos, los estudiantes parecían estar adivinando cuál podría ser un criterio válido.

### Pregunta 4

El apartado (a) fue bien resuelto por muchos alumnos, pero algunos fueron penalizados por no usar suficiente cantidad de cifras significativas. La mayoría de los alumnos empezó el apartado (b), pero solo los mejores alumnos pudieron llegar hasta el final. Muchos no pudieron completar la pregunta correctamente porque no sabían qué hacer con la sustitución  $y = vx$ , y debido a errores aritméticos y algebraicos.

## Recomendaciones y orientación para la enseñanza a futuros alumnos

- Los estudiantes deben estudiar la totalidad del programa.
- Los estudiantes deben entender las condiciones para la aplicación de los criterios de convergencia.

- Los estudiantes deben tener una base sólida de habilidades y comprensión de la sección troncal del programa de NS de Cálculo, para poder encarar con éxito esta opción.

## Prueba 3 del Nivel Superior – Conjuntos, relaciones y grupos

### Bandas de calificación del componente

<b>Calificación final:</b>	1	2	3	4	5	6	7
<b>Puntuaciones:</b>	0 - 8	9 - 16	17 - 24	25 - 31	32 - 39	40 - 46	47 - 60

### Áreas del programa y del examen que resultaron difíciles para los alumnos

En esta prueba los alumnos tuvieron dificultades para hallar las clases de equivalencia, para mostrar que una función es biyectiva y para probar que la diferencia de conjuntos no es asociativa.

### Áreas del programa y del examen en que los alumnos demostraron estar bien preparados

En general, los alumnos parecen haber estado razonablemente preparados para las preguntas sobre la mayoría de los aspectos de la teoría de grupos.

### Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar las distintas preguntas

#### Pregunta 1

La mayoría de los alumnos conocía los axiomas de grupo y las propiedades de un grupo, pero no siempre se los explicaba con claridad. Algunos alumnos no entendieron el término “abeliano”. Muchos alumnos entendían las condiciones para que un grupo fuera cíclico. Muchos alumnos no se dieron cuenta de que la respuesta al apartado (e) estaba en realidad en el apartado (d); de allí que este apartado valiera solo 1 punto. En términos generales, se vieron unas cuantas resoluciones completamente correctas a esta pregunta.

#### Pregunta 2

El apartado (a) de esta pregunta era el más accesible de la prueba y fue resuelto correctamente por la mayoría de los alumnos. El apartado (b) fue resuelto por muchos alumnos, pero un número significativo o no entendió lo que significaba asociativa, o confundió asociativa con conmutativa, o no pudo completar el álgebra.

**Pregunta 3**

Los alumnos de mayor habilidad tuvieron poca dificultad con el apartado (a) de esta pregunta, pero la demostración de una relación de equivalencia sigue siendo difícil para muchos. Las clases de equivalencia siguen causando serios problemas, y se vieron pocas resoluciones completamente correctas a esta pregunta.

**Pregunta 4**

Muchos estudiantes pudieron demostrar que la expresión era inyectiva, pero les resultó más difícil demostrar que era suryectiva. Al igual que en la pregunta 1, apartado (e), algunos alumnos no se dieron cuenta de que la respuesta al apartado (b) provenía directamente del apartado (a); de allí que valiera solo un punto.

**Pregunta 5**

Esta pregunta les resultó difícil a muchos alumnos, pero se vieron algunas resoluciones correctas. Algunos alumnos, de entre los que entendieron lo que se pedía, no obtuvieron el último punto, asignado a un razonamiento correcto. Muchos alumnos parecían poco preparados para manejar este estilo de pregunta.

## Recomendaciones y orientación para la enseñanza a futuros alumnos

- Los estudiantes deben estudiar la totalidad del programa.
- Los estudiantes deben conocer la terminología correcta.
- Los estudiantes deben entender que serán penalizados por falencias en las explicaciones o en la presentación de los procedimientos.
- En esta opción se plantearán preguntas que requieren demostraciones, y es fundamental que los estudiantes entiendan que en estas demostraciones se precisa un cierto nivel de rigor.

## Prueba 3 del Nivel Superior – Estadística y probabilidad

### Bandas de calificación del componente

<b>Calificación final:</b>	1	2	3	4	5	6	7
<b>Puntuaciones:</b>	0 - 7	8 - 15	16 - 21	22 - 28	29 - 34	35 - 41	42 - 60

## Áreas del programa y del examen que resultaron difíciles para los alumnos

En esta prueba los alumnos tuvieron dificultades a la hora de trabajar con la distribución exponencial y la distribución geométrica.

## Áreas del programa y del examen en que los alumnos demostraron estar bien preparados

En general, los alumnos parecen haber estado razonablemente bien preparados para las preguntas sobre el álgebra del valor esperado, las distribuciones  $t$ , las distribuciones normales y los intervalos de confianza.

## Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar las distintas preguntas

### Pregunta 1

La mayoría de los alumnos pudo resolver esta pregunta, pero los alumnos más flojos no siempre se dieron cuenta de que los apartados (b) y (c) evaluaban cosas distintas. El apartado (b) resultó el más difícil: una cantidad de alumnos no entendió cómo hallar la varianza de la suma de variables.

### Pregunta 2

Esta pregunta también resultó accesible a una mayoría de alumnos y hubo muchas resoluciones total o parcialmente correctas. Unos pocos alumnos no se dieron cuenta de que el apartado (a) se trataba de una distribución  $t$  y el apartado (b) de una distribución normal, pero la mayoría reconoció la diferencia. A muchos alumnos se les aplicó la penalización por aproximación incorrecta, porque no dieron la respuesta final al apartado (b) con una aproximación de 3 cifras significativas.

### Pregunta 3

Los alumnos de mayor habilidad tuvieron poca dificultad con esta pregunta, pero un número significativo de alumnos más flojos se topó con diversos problemas. Muchos no se dieron cuenta de que el apartado (b) se podía resolver usando la respuesta del apartado (a), y la manipulación de logaritmos en el apartado (iii) fue pobre. Los alumnos de menor habilidad sabían cómo empezar el apartado (c), pero se toparon con dificultades por redondear los valores esperados y olvidarse de combinar las clases. Algunos alumnos parecen tener la idea de que el criterio para la combinación de clases es que la frecuencia observada sea menor de 5, en lugar de la esperada.

### Pregunta 4

Esta pregunta resultó difícil para la mayoría de los alumnos y se vieron pocas resoluciones totalmente correctas. Pocos alumnos pudieron hallar  $P(X = x)$  en función de  $n$  y  $x$ , y muchos no se dieron cuenta de que el último apartado de la pregunta les pedía que hallaran la suma de una serie. Sin embargo, los mejores alumnos recibieron más del 75% de los puntos, porque se pudo aplicar el criterio de arrastre de error.

## Recomendaciones y orientación para la enseñanza a futuros alumnos

- Los alumnos deben conocer el potencial de la calculadora de pantalla gráfica en esta prueba. La mayoría de los estudiantes no la estaba usando al máximo de su potencial.
- Los estudiantes deben estudiar la totalidad del programa y estar preparados para resolver preguntas sobre cualquiera de las distribuciones que aparecen en el programa.
- En la opción de estadística y probabilidad, muchos estudiantes pierden el punto de penalización por aproximación incorrecta, además de otros puntos, por no redondear correctamente. Se debería usar la mayor cantidad de cifras significativas posible, salvo en la respuesta final, que debería darse con 3 cifras significativas.
- Los estudiantes deben tener una base sólida de habilidades y comprensión de la sección troncal del programa de NS de Estadística y probabilidad, para poder encarar con éxito esta opción.